

Úvod do teoretické informatiky

Referát číslo 7

Jakub Kamrla, KAM087

Zadání

Proveďte co nejjemnější analýzu následujících vět, pote znegujte a negovaná tvrzení převeďte opět do přirozeného jazyka:

1. Pouze Adam a Eva jsou lidé, pro něž neplatí, že mají matku.
2. Každé zvíře je býložravec jen tehdy když neloví žádné zvíře.
3. Pro každé přirozené číslo existuje číslo, které je větší.

Popis teorie

Predikátová logika 1. řádu

Formalizuje úsudky o vlastnostech předmětů a vztazích mezi předměty pevně dané předmětné oblasti neboli universa.

Abeceda predikátové logiky

1. Logické symboly

Při přepisu vět do jazyka PL1 používáme tyto symboly

1.1 Předmětové proměnné

Používáme pro označení proměnných x, y, z popřípadě s indexy

1.2 Symboly pro spojky

- $\neg$ Negace. Odpovídá "není pravda že"
- $\wedge$ Konjunkce. Odpovídá "a zároveň"
- $\vee$ Disjunkce. Odpovídá "nebo"
- $\supset$ Implikace. Odpovídá "jestliže, pak", "když, tak"
- $\equiv$ Ekvivalence. Odpovídá "právě tehdy, když", "tehdy a jen tehdy, když"

1.3 Symboly pro kvantifikátory

- $\forall$ Všeobecný kvantifikátor, značí "Pro všechny platí..."
- $\exists$ Existenční kvantifikátor, značí "Existuje prvek pro který platí.."

Dále můžeme mít například binární predikátový symbol $=$ (predikátová logika s rovností).

2. Speciální symboly

Ke každému funkčnímu a predikátovému symbolu je přiřazeno nezáporné číslo n větší nebo rovno 0 ($n \geq 0$). Toto číslo znamená **ARITU** a udává počet individuových proměnných, které jsou argumenty funkce nebo predikátu.

2.1 Predikátové symboly $p, q, r, \dots$

Jestliže je arita $n = 0$ jedná se o individuovou konstantu (značíme a, b, c)

Tato konstanta však není pravou logickou konstantou, neboť podléhá interpretaci

Jestliže je arita $n = 1$ jde o nějakou vlastnost (podmnožina universa)
Znamená vlastně že prvek patří do nějaké množiny (universa).

Je-li arita větší, jedná se o nějakou relaci (binární, ternární atd.)

Relace R nad množinami A, B je podmnožina kartézského součinu: $R \subseteq A \times B$

Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $\langle a, b \rangle$, kde $a \in A, b \in B$

2.2 Funkční symboly f, g, h

Tyto symboly vyjadřují určitou funkci $y = f(x)$

A platí že každému x z množiny A je přiřazeno právě jedno y z množiny B .

Množina A je nazývána definičním oborem funkce f a množina B oborem hodnot

Typy funkcí mohou být například **Surjekce**, **injekce** nebo **bijekce**

Rozdíl mezi funkcí a relací je že u funkce je každé hodnotě x přiřazena jednoznačná hodnota y . U relace tento počet neomezujeme.

3. Pomocné symboly (závorky)

(,) popřípadě [,] {,}

Příklad číslo 1

Pouze Adam a Eva jsou lidé, pro něž neplatí, že mají matku.

Skutečnost mít matku vyjádříme funkcí **f(x)** x bude příslušná konstanta. Vztah **potomek matka** bude vyjádřen relací R.

Vyjádříme podmínku, která platí pro všechny lidi a pokud je splněna za proměnnou x dosadíme konstantu **a** nebo **b**.

Formalizace

$$\forall x [\neg R(x, f(x))] \supset [x = a \vee x = b]$$

To znamená jestliže člověk **x** nemá matku, pak můžeme za proměnnou **x** dosadit kteroukoliv z konstant **a** nebo **b**.

Zvolené universum jsou lidé. Z tohoto důvodu nemusíme brát v potaz zda x patří do množiny lidí. Proměnná **x** představuje lidi. Konstanty a,b potom Adama a Evu

Nyní provedeme negaci

$$\exists x [\neg R(x, f(x))] \wedge [x \neq a \wedge x \neq b]$$

Věta převedená zpět do přirozeného jazyka

Existuje člověk, který nemá matku a není to Adam a Eva.

Příklad číslo 2

Každé zvíře je býložravec jen tehdy když neloví žádné zvíře.

Pro skutečnost **být býložravcem** použijeme predikát P(x) . Skutečnost **lovit zvíře** bude relace R(kdo,koho).

Formalizace

$$\forall x \forall y [P(x) \supset \neg R(x, y)]$$

Zvolené universum jsou všechna zvířata. Proměnná x představuje zvíře, které může být býložravcem. Proměnná y jsou zvířata, která jsou lovena.

A nyní znegujeme

$$\exists x \exists y [P(x) \wedge R(x, y)]$$

Znegovaná formule převedená do přirozeného jazyka

Existuje zvíře, které je býložravec a zároveň existuje nějaké zvíře které loví.

Příklad číslo 3

Pro každé přirozené číslo existuje číslo, které je větší.

Pro skutečnost být větší prvek než jiný použijeme relaci $R(x,y)$ a bude platit že $x > y$.

Formalizace

$$\forall x \exists y [P(x) \supset R(y,x)]$$

Zvolené universum jsou všechna čísla. Proměnná x představuje číslo které může být přirozené. Proměnná y vyjadřuje číslo větší než x .

Negace

$$\exists x \forall y [P(x) \wedge \neg R(y,x)]$$

Znegovaná formule převedená do přirozeného jazyka

Existuje přirozené číslo a zároveň pro všechna čísla platí že nejsou větší.